 Hilbert/Cohn-V

fallen. Die übrigen Seiten 3, 4, die dabei in Kreise übergegangen sind, können wir in der vorgeschriebenen Weise aneinanderheften, indem wir (Abb. 284) den Kreiszylinder verbiegen. Wir erhalten schließlich die Fläche des Torus, und der Rand der Rechtecksfläche geht in ein „kanonisches Schnittsystem“ des Torus über, wobei jede Kurve zwei Randstrecken der Rechtecksfläche entspricht (Abb. 285 und 275 b). Umgekehrt: schneidet man den Torus längs eines kanonischen Systems auf, so ergibt sich stets eine Figur, die dem Rechteck mit der angegebenen Ränderzuordnung topologisch äquivalent ist. Man kann dieses Verfahren auf alle „Brezeln“ ausdehnen. Hat die Brezel den Zusammenhang $2p+1$, so besteht das kanonische Schnittsystem aus $2p$ Kurven. Die Zerschneidung liefert also ein $4p$-Eck mit einer bestimmten Ränderzuordnung. Für die Fälle $h=5, 7$, also $p=2, 3$, ist die Konstruktion durch Abb. 286, 287 veranschaulicht.

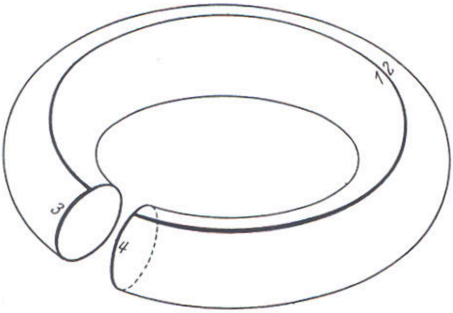


Abb. 284.

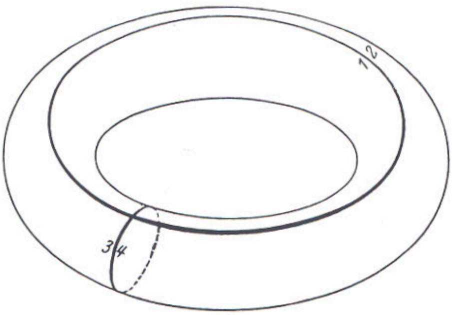


Abb. 285.

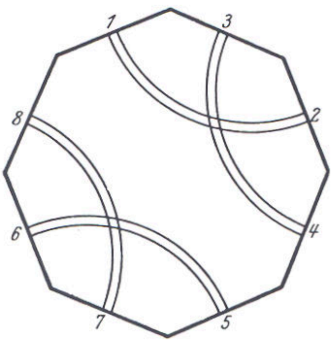


Abb. 286a.

Die Abbildung der Brezeln auf $4p$-Ecke spielt sowohl in der Theorie der stetigen Abbildungen (vgl. S. 284) als auch in der Funktionentheorie (vgl. S. 294) eine wichtige Rolle. In beiden Anwendungen geht man davon aus, daß die $4p$-Ecke eine reguläre Gebietseinteilung der hyperbolischen Ebene (bzw. für $p=1$ der euklidischen Ebene) liefern, wie wir das auf S. 228 erörtert haben.

Wenn man die Ränderzuordnung abändert, erhält man außer den Brezeln noch eine große Anzahl weiterer Flächen, von denen uns einige im folgenden beschäftigen werden.

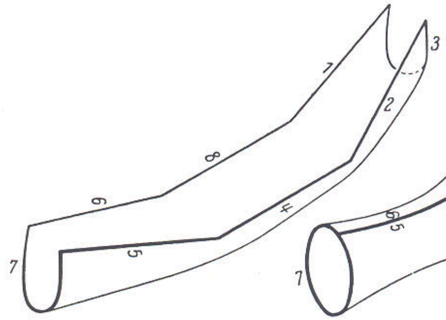


Abb. 286 b.

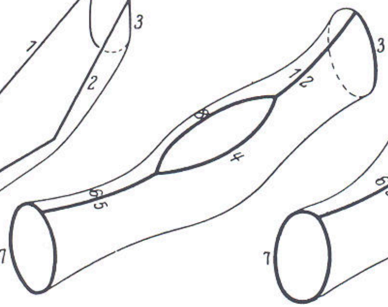


Abb. 286 c.

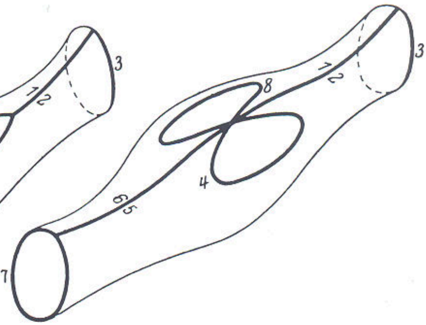


Abb. 286 d.

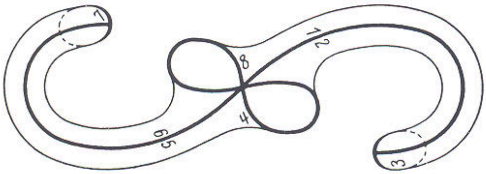


Abb. 286 e.

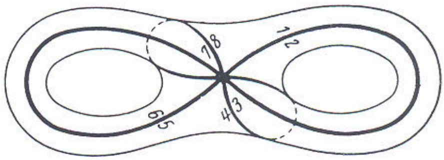


Abb. 286 f.

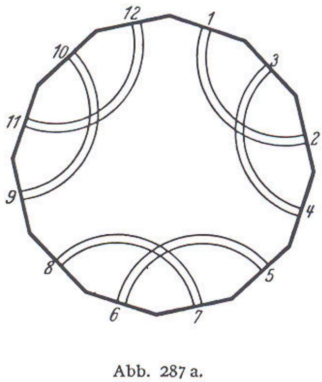


Abb. 287 a.

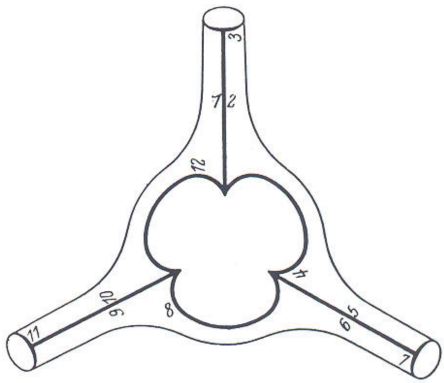


Abb. 287 b.

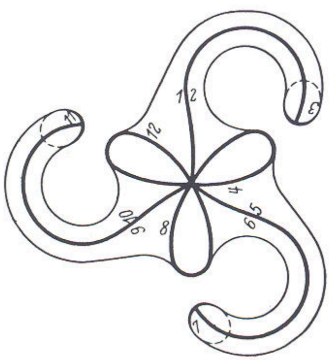


Abb. 287 c.

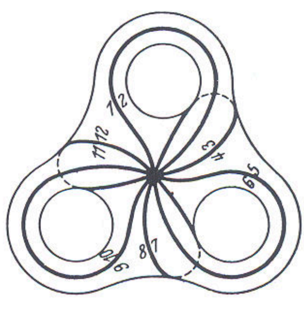


Abb. 287 d.

logische Eigenschaft darzustellen. Während in diesem Beispiel eine geschlossene Durchdringungskurve vorhanden war, besitzt die Durchdringungskurve des Heptaeders sechs Endpunkte, nämlich die Ecken des Heptaeders. Diese sind nun wirklich als Singularitäten anzusehen.

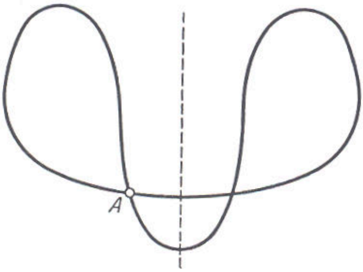


Abb. 293.

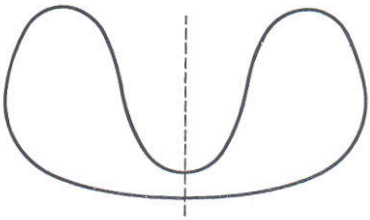


Abb. 294.

Die Umgebung eines regulären Punkts auf einer Fläche läßt sich nämlich stets in eine Kreisscheibe verzerren; für die Umgebung einer Heptaederecke (Abb. 288) ist dagegen eine solche Deformation nicht ohne weiteres möglich. Das Heptaeder besitzt demnach sechs singuläre Punkte, und

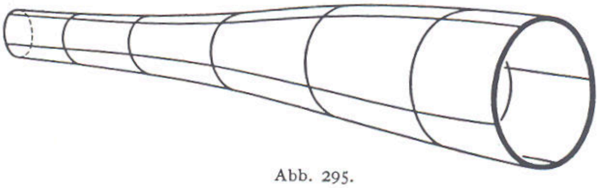


Abb. 295.

es erhebt sich die Frage, ob es überhaupt eine einseitige geschlossene Fläche ohne singuläre Punkte gibt.

Eine solche Fläche ist zuerst von F. Klein angegeben worden. Wir gehen aus von einer an beiden Seiten offenen Röhre (Abb. 295). Früher haben wir aus einer solchen Röhre durch Zusammenbiegen und Aneinanderheften der Randkreise die Torusfläche erhalten. Diesmal heften wir die Enden in anderer Weise zusammen. Wir denken uns

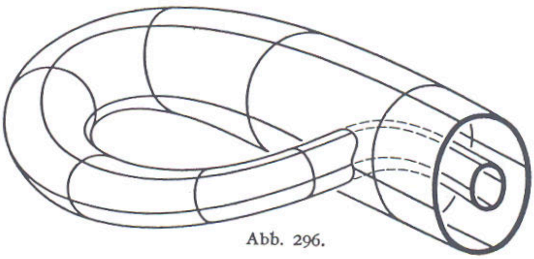


Abb. 296.

das eine Ende der Röhre etwas kleiner als das andere und stecken nach passender Verbiegung der Röhre dieses Ende so durch die Wand der Röhre, daß beide Randkreise konzentrische Lage annehmen (Abb. 296). Indem wir den weiteren Rand der Röhre etwas nach innen, den engeren Rand etwas nach außen biegen, lassen sich die beiden Ränder nun ohne

Singularität zusammenheften. Damit haben wir die Kleinsche Fläche konstruiert (Abb. 297). Sie ist offenbar einseitig und besitzt eine geschlossene Durchdringungskurve an der Stelle, wo wir das engere Ende der Röhre durch die Wand der Röhre hindurchgesteckt haben.

Da das erste Beispiel einer geschlossenen einseitigen Fläche, das Heptaeder, sich von den geschlossenen bisher betrachteten zweiseitigen Flächen auch durch seinen geraden Zusammenhang unterschied, können wir erwarten, daß die Kleinsche Fläche ebenfalls geraden Zusammenhang besitzt. In Wahrheit besitzt diese Fläche aber den Zusammenhang 3 wie der Torus. Auch das kanonische Schnittsystem kann genau so wie beim Torus gewählt werden; als erste, geschlossene Zerschneidungskurve wählen wir die Naht, längs der wir die Röhrenenden aneinandergeheftet hatten. Als zweite Kurve eine solche, die in das Stück einer Zylindererzeugenden übergeht, wenn wir die Kleinsche

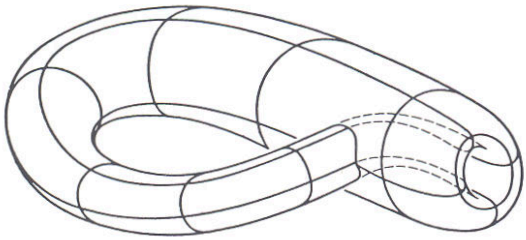
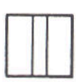
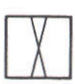
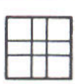
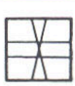


Abb. 297.

	Ebener Kreisring	zwei Randkurven	$h = 2$	zweiseitig
	Möbiussches Band	eine Randkurve	$h = 2$	einseitig
	Torus	geschlossene Fläche	$h = 3$	zweiseitig
	Kleinsche Fläche	geschlossene Fläche	$h = 3$	einseitig
	projektive Ebene	geschlossene Fläche	$h = 2$	einseitig

Fläche längs der Naht wieder auftrennen und sie wieder in Zylindergestalt zurückbiegen. Durch Zerschneidung längs dieser beiden Kurven geht die Kleinsche Fläche ebenso wie die des Torus in ein Rechteck über. Jede Kurve, die zwei Randpunkte des Rechtecks verbindet, zer-